1　$0.333\cdots = \frac{1}{3}$ の説明

動画最後に出題した問題の解答として，$0.333\cdots$ が $\frac{1}{3}$ に等しいことを「定義」から説明する。

できれば，以下の説明を読む前に自分で 30 分ほど考えてみてほしい。やり方は動画内で $0.999\cdots = 1$ を説明する際に使った論法とほぼ同じなので，それを参考にするとやりやすいだろう。

さて，今回の授業で習った「定義」によれば，$0.333\cdots$ は

$$b_n = 0.\underbrace{33\cdots3}_{n} \tag{1}$$

で定義される数列 $\{b_n\}$ の極限値を表すのであった。ということは，$\{b_n\}$ が $\frac{1}{3}$ に収束することを説明すればよい。

これをどう説明するか？　もう一度，収束の定義を思い出そう。「$\{b_n\}$ が $\frac{1}{3}$ に収束する」とは，「n を必要に応じて十分大きくすれば，b_n を $\frac{1}{3}$ に好きなだけ近づけることができる」ことであった。これを言うには，授業でやったように「目標値との差」をとるのが賢いやり方である。すなわち

$$\frac{1}{3} - b_n = \frac{1}{3} - 0.\underbrace{33\cdots3}_{n} \tag{2}$$

が（n を大きくすれば）好きなだけ小さく出来ることを言えばよい[*1]。右辺を $\frac{1}{3}$ でくくると，

$$\frac{1}{3} - b_n = \frac{1}{3} \times (1 - 0.\underbrace{99\cdots9}_{n}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10^n}. \tag{3}$$

この右辺は明らかに n を大きくすれば好きなだけ小さく出来るから，数列 $\{b_n\}$ は $\frac{1}{3}$ に収束する。言い換えれば，数列 $\{b_n\}$ の極限である $0.333\cdots$ は $\frac{1}{3}$ に等しい。これにて主題は示された。（終わり）

[*1] 一般には「目標値」と数列の値のどちらが大きいか分からないので，「差の**絶対値**」を考察したほうが良い。ただ今回の場合は，$\frac{1}{3}$ が b_n より大きいことがはっきりしているのであえて絶対値をとらなかった。